Aufgaben zum Gaußschen Algorithmus

1.0 Berechnen Sie die Lösungsmengen folgender linearer Gleichungssysteme.

1.1 (I) $4x_1 + 7x_2 + 12x_3 = -5$
(II) $-2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -4$
(III) $2x_1 + x_2 + 9x_3 = 0$

1.2 (I) $2x_1 + x_2 - x_3 - 2 = 0$
(II) $3x_1 + 2x_2 + x_3 - 0{,}5 = 0$
(III) $-x_1 - 2x_2 - x_3 - 4 = 0$

1.3 (I) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$
(II) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0$
(III) $4x_1 + 9x_2 + 16x_3 = 0$

1.4 (I) $x_1 = x_3$
(II) $x_2 = -x_1$
(III) $2x_1 + 4x_2 - 33x_3 = -25$

1.5 (I) $8x_1 - 4x_2 + x_3 = 7$
(II) $-5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 21$
(III) $-3x_1 + x_2 - 8x_3 = -56$

1.6 (I) $2x_1 - x_2 + x_3 = 1$
(II) $4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1$
(III) $6x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

1.7 (I) $3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0$
(II) $4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2$
(III) $-2x_1 + x_2 - x_3 = -1$

1.8 (I) $3x_1 + x_2 = 3$
(II) $x_1 - x_2 = -1$
(III) $2x_1 + 4x_2 = 7$

1.9 (I) $-x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0$
(II) $3x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0{,}5$

1.10 (I) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 33$
(II) $x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 21$
(III) $3x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 37$
(IV) $5x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 36$

2.0 Gegeben ist das lineare Gleichungssystem
(I) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
(II) $2x_1 + 3x_2 + mx_3 = -1$
(III) $4x_1 + 9x_2 + m^2x_3 = 1$

2.1 Setzen Sie m = -1 und lösen Sie das erhaltene System.
2.2 Zeigen Sie, dass für m = 2 das System nicht lösbar ist.
2.3 Drücken Sie die Lösungswerte von x_1, x_2, x_3 mit Hilfe des Parameters m ($m \neq 2\,; m \neq 3$) aus.

3. Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem ($t \in R$).
(I) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$
(II) $(t-1)x_2 + (t^2+1)x_3 = 0$
(III) $tx_1 + x_2 - x_3 = 0$

Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen dieses linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von t.

4 Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem ($a \in R$).

(I) $x_1 - x_2 - x_3 = -4$

(II) $x_1 + x_2 + x_3 = 3$

(III) $x_1 + 5x_2 + ax_3 = 0$

Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus den Wert von a, für den das lineare Gleichungssystem keine Lösung hat.

5 Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem mit $t \in \mathbb{R}$. (Abitur 2009 BI)

(I) $2x_1 - x_2 - 2x_3 + 9{,}5 = t$

(II) $x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 6 = 0$

(III) $t \cdot (x_1 + x_2) - 6x_3 + 3 = 0$

Ermitteln Sie die Anzahl der Lösungen dieses Gleichungssystems in Abhängigkeit von t.

6.0 Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem:

(I) $x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$

(II) $x_2 + x_3 = 1$

(III) $2x_1 - x_2 + x_3 = c$ mit $c \in \mathbb{R}$

(Abitur 2011 BI)

6.1 Ermitteln Sie in Abhängigkeit von c die Anzahl der Lösungen des Gleichungssystems.

6.2 Bestimmen Sie für c = 3 die Lösung des Gleichungssystems.

7.0 Ermitteln Sie die Anzahl der Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

7.1

(I) $2x_1 + 2ax_2 = 4$

(II) $(a+3)x_2 + x_3 = 1$

(III) $a(a^2 - 4)x_3 = a^2 - a - 2$

7.2

(I) $-2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -3$

(II) $6x_1 - 4x_2 + 2ax_3 = 8$

(III) $-3x_1 - 9x_2 + 3x_3 = -1$

7.3

(I) $4x_1 - 2ax_2 + 14x_3 = -2$

(II) $-12x_1 - 12x_2 + 34x_3 = -26$

(III) $-3x_1 - 3x_2 - 15x_3 = -18$

7.4

(I) $(a^2+2a-4)x_3=-3a^2-3a$

(II) $x_1-x_2=a$

(III) $(-2a^2-2a)x_3=6a^2+6a$

(IV) $-2x_2-2ax_3=3a-1$

7.5

(I) $x_1-x_2+3x_3=0$

(II) $-x_1+2x_2-c=0$

(III) $1{,}5x_1-3x_2+cx_3=1$

7.6

(I) $2x_1-3x_2-x_3=2+\frac{c}{2}$

(II) $-2x_1+8x_2+(c-4)x_3=2$

(III) $-2x_1+(c+4)x_2+(c+2)x_3=0$

8 Bestimmen Sie die Parameter $a,b,c\in\mathbb{R}$ so, dass das Gleichungssystem die Lösungsmenge $L=\{(-1;2;2)\}$ besitzt.

(I) $2x_1+ax_2+x_3=-4$

(II) $bx_1-3x_2+x_3=-5$

(III) $6x_1-x_2+cx_3=3a$

9 Ein Konditor stellt Kuchenböden aus Biskuitteig, Hefeteig, Mürbteig oder Rührteig her. Lässt man die kleineren Zutaten wie Vanillinzucker, Backpulver oder Hefe außer Betracht, so lassen sich die Zutaten für jeweils einen Kuchenboden in der folgenden Tabelle notieren (Zutaten in g pro Stück und Eier in Stück pro Stück):

	Biskuitteig	**Hefeteig**	**Mürbteig**	**Rührteig**
Mehl	250	500	300	300
Butter	0	60	200	200
Zucker	180	60	100	180
Eier	4	1	0	4

Der Konditor stellt fest, dass er noch 6,7 kg Mehl, 2,92 kg Butter, 3,08 kg Zucker und 50 Eier hat.
Bestimmen Sie, wie viele Böden jeder Teigsorte der Konditor backen kann, wenn er alle Rohmaterialien aufbrauchen soll.

10 Eine Einrichtungsfirma bietet Wandregale verschiedener Breite an. In der untenstehenden Tabelle sind die jeweils benötigten Materialien für die Wandregale aufgeführt.

	1m Regal	**2m Regal**	**3m Regal**	**4m Regal**
Seitenteile	2	3	4	5
Regalbretter	5	10	15	20
Kurze Schrauben	4	3	6	8
Lange Schrauben	0	5	15	35

Der Firmeninhaber beschließt nach einiger Zeit, ein neues Design für die Regale zu entwerfen und räumt deshalb das Lager mit den alten Regalen. Er hat noch 49 Seitenteile, 165 Regalbretter, 66 kurze Schrauben und 120 lange Schrauben auf Lager. Bestimmen Sie, in welcher Regalzusammenstellung der Restbestand vollständig aufgebraucht wird.

11.0 Auf einem Bauernhof gibt es Schweine und Gänse mit insgesamt 14 Köpfen und 48 Füßen.

11.1 Ermitteln Sie, wie viele Schweine und Gänse auf dem Bauernhof leben.

11.2 Ein Besucher behauptet, doppelt so viele Schweine wie Gänse gesehen zu haben. Überprüfen Sie dies.

12.0 In einem Burgerrestaurant gibt es den Veggieburger (V), den Premiumburger (P) und den Luxusburger (L). Für vier Veggieburger zahlt man so viel wie für einen Premium- und zwei Luxusburger zusammen. Der Luxusburger kostet 2 € mehr als der Premiumburger.
Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf und überprüfen Sie folgende Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt.

12.1 Der Veggieburger kostet 7 €, wenn der Luxusburger 10 € und der Premiumburger 8 € kosten.

12.2 Der Veggieburger kostet 10,50 €, wenn der Luxusburger 12 € und der Premiumburger 10 € kosten.

13 Lara, Ben, Alyssa und Enya kaufen für ein Projekt im Kunstunterricht unabhängig voneinander im örtlichen Bastelgeschäft Materialien ein. Lara, Ben und Alyssa wissen noch genau, was sie eingekauft haben.

	Federn	Filzplatten	Perlen
Lara	3	2	1
Ben	3	1	2
Alyssa	3	3	1

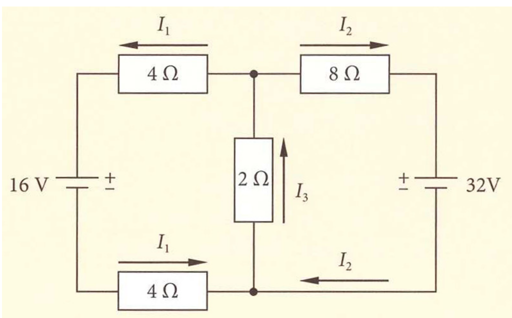
Lara hat insgesamt 6,10 € bezahlt, Ben 5,60 € und Alyssa 7,05 €. Enya hat 6,55 € bezahlt und ist sich sicher, dass sie auch drei Federn gekauft hat. Sie weiß allerdings nicht mehr genau, wie viele Filzplatten und Perlen sie gekauft hat. Ihre ältere Schwester Jaqueline war auch in dem Geschäft und hat nun mehrere Filzplatten und Perlen. Sie behauptet, dass alle ihr gehören, so dass Enya leer ausgeht.
Helfen Sie Enya, sich gegen ihre Schwester zu wehren.

14 Im Supermarkt zahlt Anna für 4 Packungen Nudeln, 1 Kiste Limonade und 2 Liter Milch insgesamt 18,30 Euro. Anja zahlt für 3 Packungen Nudeln, 2 Kisten Limonade und 4 Liter Milch 32,65 Euro und Raphaela erhält für 14,90 Euro eine halbe Kiste Limonade, 7 Packungen Nudeln und 3 Liter Milch.
Geben Sie die Preise von einer Packung Nudeln, einer Kiste Limonade und einem Liter Milch an.

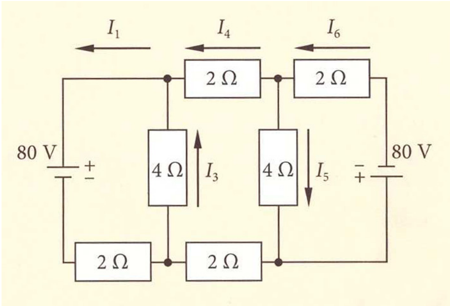
15 Aus Calcium und Phosphorsäure sollen Calciumdiphosphat und Wasserstoff hergestellt werden.
Bestimmen Sie, für welche Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 $x_1 Ca + x_2 H_3PO_4 \rightarrow x_3 Ca_3P_2O_8 + x_4 H_2$
gilt. Geben Sie die kleinste ganzzahlige Lösung an.

16.0 Berechnen Sie jeweils alle Stromstärken mithilfe eines LGS.
Verwenden Sie dazu die Knoten- und Maschenregel in einem Gleichstromnetz.
Knotenregel: Die Summe der Stromstärken der ankommenden Ströme ist in jedem Knoten gleich der Summe der abfließenden Ströme.
Maschenregel: Alle Teilspannungen einer Masche addieren sich zu null.

16.1



16.2



17 Eine Studentin der Elektrotechnik benötigt im Rahmen ihrer Abschlussarbeit für den Bau eines Industrieroboters 20 Chips des Typs C_1, 23 Chips des Typs C_2 und 11 Chips des Typs C_3.
In dem der Universität am nächsten gelegenen Elektronikfachgeschäft werden diese Chips in drei verschiedenen Packungseinheiten angeboten.
Paket 1 enthält je 2 Chips vom Typ C_1 und C_2; Paket 2 ist mit 4 Chips vom Typ C_1, 5 Chips vom Typ C_2 und 5 Chips vom Typ C_3 bestückt; im Paket 3 sind 6 Chips vom Typ C_1, 7 Chips vom Typ C_2 und 3 Chips vom Typ C_3.
Ermitteln Sie die Anzahl der Pakete, die von der Studentin gekauft werden sollten.

18 Berechnen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems. Es gilt: $a,b,c \in \mathbb{R}$.
(Abitur 2025 GII)

$$\begin{aligned} &\text{I)} & 6a-2b-3c&=-20 \\ &\text{II)} & -a+6b-c&=10 \\ &\text{III)} & -2b+3c&=80 \end{aligned}$$

Lösungen

1.1 $\mathbb{L}=\left\{(\frac{1}{2};-1;0)\right\}$ 1.2 $\mathbb{L}=\left\{(\frac{9}{4};-\frac{35}{12};-\frac{5}{12})\right\}$ 1.3 $\mathbb{L}=\left\{(0;0;0)\right\}$

1.4 $\mathbb{L}=\left\{(\frac{5}{7};-\frac{5}{7};\frac{5}{7})\right\}$ 1.5 $\mathbb{L}=\left\{(0;0;7)\right\}$

1.6 $x_1=\frac{1}{5}-\frac{1}{10}x_3;x_2=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}x_3$ $\Rightarrow$ unendlich viele Lösungen

1.7 $x_1=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}x_3;x_2=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}x_3$ $\Rightarrow$ unendlich viele Lösungen

1.8 $\mathbb{L}=\left\{(\frac{1}{2};\frac{3}{2})\right\}$ 1.9 $x_1=-1+29x_3;x_2=0{,}5-12x_3 \Rightarrow$ unendlich viele Lösungen

1.10 $\mathbb{L}=\left\{(5;3;1;2)\right\}$

2.1 $\mathbb{L}=\left\{(0;0;1)\right\}$

2.2 (I) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
(II) $2x_2 = -6$
(III) $5x_2 = -3$
$\Rightarrow \mathbb{L}=\left\{\ \right\}$

2.3 $\mathbb{L}=\left\{\frac{4(m+1)}{m-2};\frac{-3(m+1)}{m-3};\frac{12}{(m-2)(m-3)}\right\}$

3

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & t-1 & t^2+1 & 0 \\ 0 & t-1 & t+1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & t-1 & t^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & t^2-t & 0 \end{array}\right)$$

1. $t^2-t=0 \Rightarrow t(t-1)=0 \Rightarrow t_1=0 \quad t_2=1$
   $\Rightarrow$ für diese beiden Werte hat das lineare Gleichungssysteme unendlich viele Lösungen
2. $t^2-t\neq 0 \Rightarrow t\in \mathbb{R}\setminus\left\{0;1\right\}$
   $\Rightarrow$ für diese Werte hat das lineare Gleichungssystem eine eindeutige Lösung

4

$$\begin{array}{c}(I)\\(II)\\(III)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & -4\\ 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 5 & a & 0\end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c}(I)\\(II)\\(III)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & -4\\ 0 & 2 & 2 & 7\\ 0 & 6 & a+1 & 4\end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c}(I)\\(II)\\(III)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & -4\\ 0 & 2 & 2 & 7\\ 0 & 0 & a-5 & -17\end{array}\right)$$

$a-5=0 \Rightarrow a=5 \Rightarrow (III)\; 0\;\;0\;\;0 \,|\, -17$

$\Rightarrow$ für a=5 hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung

5

$$\begin{array}{c}(I)\\(II)\\(III)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & -2 & t-9{,}5\\ 1 & -2 & 2 & -6\\ t & t & -6 & -3\end{array}\right) \overset{t\neq 0}{\Rightarrow} \begin{array}{c}(I)\\(II)\\(III)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & -2 & t-9{,}5\\ 0 & 3 & -6 & t+2{,}5\\ 0 & 3t & -2t-6 & 6t-3\end{array}\right) \overset{t\neq 0}{\Rightarrow} \begin{array}{c}(I)\\(II)\\(III)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & -2 & t-9{,}5\\ 0 & 3 & -6 & t+2{,}5\\ 0 & 0 & 4t-6 & -t^2+3{,}5t-\end{array}\right.$$

$4t-6=0 \Rightarrow t=1{,}5 \Rightarrow (III)\; 0\;\;0\;\;0 \,|\, 0$

$\Rightarrow$ für t = 1,5 hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen

$\Rightarrow$ für t $\neq$ 1,5 (auch für t = 0) hat das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung

6.1

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1 & c\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & -3 & c-6\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & c-3\end{array}\right)$$

$c=3$: LGS hat unendlich viele Lösungen

$c \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$: LGS hat keine Lösung

6.2

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$\Rightarrow x_3 = r$ beliebig

$(II) \Rightarrow x_2 + x_3 = 1 \quad \Rightarrow x_2 = 1-r$

$(I) \Rightarrow x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \quad \Rightarrow x_1 + 1 - r + 2r = 3 \quad \Rightarrow x_1 = 2-r$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} \quad \text{mit } r \in \mathbb{R}$$

7.1

$a=0$: keine Lösung

a = 2: unendlich viele Lösungen

a = -2: keine Lösung

a = -3: keine Lösung

$a \in \mathbb{R} \setminus \{-3;-2;0;2\}$: eine eindeutige Lösung

7.2

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -3 & -3 \\ 6 & -4 & 2a & 8 \\ -3 & -9 & 3 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 22 & -4a+18 & 2 \\ 0 & 33 & -15 & -7 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 22 & -4a+18 & 2 \\ 0 & 0 & -264+132a & 88 \end{array}\right)$$

$-264+132a=0 \quad \Rightarrow a=2$

$a=2$: keine Lösung

$a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$: eine eindeutige Lösung

7.3

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -12 & -12 & 34 & -26 \\ -3 & -3 & -15 & -18 \\ 4 & -2a & 14 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -12 & -12 & 34 & -26 \\ 0 & 0 & 282 & 138 \\ 0 & 24a+48 & -304 & 128 \end{array}\right)$$

$24a+48=0 \quad \Rightarrow a=-2$

$a=-2$: keine Lösung

$a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$: eine eindeutige Lösung

7.4

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \\ (IV) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & a^2+2a-4 & -3a^2-3a \\ 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & 0 & -2a^2-2a & 6a^2+6a \\ 0 & -2 & -2a & 3a-1 \end{array}\right)$$

$a^2+2a-4=0 \quad \Rightarrow a_1=-1+\sqrt{5} \quad a_2=-1-\sqrt{5}$

$-2a^2-2a=0 \quad \Rightarrow a_3=0 \quad \Rightarrow a_4=-1$

$a^2+2a-4=-2\cdot(-2a^2-2a) \quad \Rightarrow 3a^2+2a+4=0$ (f)

$\Rightarrow a=0$: eine eindeutige Lösung

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: keine Lösung

7.5

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & c \\ 1{,}5 & -3 & c & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & c \\ 0 & -1{,}5 & c-4{,}5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & c \\ 0 & 0 & c & 1+1{,}5c \end{array}\right)$$

$c=0$: keine Lösung

$c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$: eine eindeutige Lösung

7.6

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 2+\frac{c}{2} \\ -2 & 8 & c-4 & 2 \\ -2 & c+4 & c+1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 2+\frac{c}{2} \\ 0 & 10 & 2c-10 & 8+c \\ 0 & 2c+2 & 2c+2 & 4+c \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 2+\frac{c}{2} \\ 0 & 10 & 2c-10 & 6+c \\ 0 & 0 & -4c^2+36c+40 & -2c^2-8c-24 \end{array}\right)$$

$-4c^2+36c+40=0 \quad \Rightarrow c_1=-1 \quad c_2=10$

$c=-1$: keine Lösung

$c=10$: keine Lösung

$c\in\mathbb{R}\setminus\{-1;10\}$: eine eindeutige Lösung

8

(I) $-2+2a+2=-4 \quad \Rightarrow a=-2$

(II) $-b-6+2=-5 \quad \Rightarrow b=1$

(III) $-6-2+2c=-2 \quad \Rightarrow c=3$

9 Es ergibt sich folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
&(I) && 250x_1+500x_2+300x_3+300x_4=6700 \,|\, :50\\
&(II) && 60x_2+200x_3+200x_4=2920 \,|\, :20\\
&(III) && 180x_1+60x_2+100x_3+180x_4=3080 \,|\, :20\\
&(IV) && 4x_1+x_2+4x_4=50
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(I) && 5x_1+10x_2+6x_3+6x_4=134\\
&(II) && 3x_2+10x_3+10x_4=146\\
&(III) && 9x_1+3x_2+5x_3+9x_4=154\\
&(IV) && 4x_1+x_2+4x_4=50
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus ergibt sich:

$x_1=6 \qquad x_2=2 \qquad x_3=8 \qquad x_4=6$

Der Konditor kann also mit seinen Zutaten sechs Biskuitteig-, zwei Hefeteig-, acht Mürbteig- und sechs Rührteigböden herstellen.

10 Es ergibt sich folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
&(I) && 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=49\\
&(II) && 5x_1+10x_2+15x_3+20x_4=165 \,|\, :5\\
&(III) && 4x_1+3x_2+6x_3+8x_4=66\\
&(IV) && 5x_2+15x_3+35x_4=120 \,|\, :5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(I) && 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=49\\
&(II) && x_1+2x_2+3x_3+4x_4=33\\
&(III) && 4x_1+3x_2+6x_3+8x_4=66\\
&(IV) && x_2+3x_3+7x_4=24
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus ergibt sich:

$x_1=4 \qquad x_2=8 \qquad x_3=3 \qquad x_4=1$

Man kann also mit den Restbeständen vier 1m Regale, acht 2m Regale, drei 3m Regale und ein 4m Regal herstellen.

11.1

$x:$ Anzahl Schweine $\quad y:$ Anzahl Gänse

(I) $x+y=14$

(II) $4x+2y=48$

(I) $\Rightarrow x=14-y$

(II) $\Rightarrow 56-4y+2y=48 \quad \Rightarrow y=4 \quad \Rightarrow x=14-4=10$

Auf dem Bauernhof leben 10 Schweine und 4 Gänse.

11.2 Die Behauptung ist falsch.

12.1

(I) $4V=P+2L$

(II) $L=P+2$

(I) $\Rightarrow 4\cdot 7=8+2\cdot 10 \quad \Rightarrow 28=28$ (w)

(II) $\Rightarrow 10=8+2$ (w)

Die Aussage ist wahr.

12.2

(I) $4V=P+2L$

(II) $L=P+2$

(I) $\Rightarrow 4\cdot 10{,}5=10+2\cdot 12 \quad \Rightarrow 42=34$ (f)

(II) $\Rightarrow 12=10+2$ (w)

Die Aussage ist falsch.

13

$x_1:$ Preis Federn $\quad x_2:$ Preis Filzplatten $\quad x_3:$ Preis Perlen

(I) $3x_1+2x_2+x_3=6{,}10$

(II) $3x_1+x_2+2x_3=5{,}60$

(III) $3x_1+3x_2+x_3=7{,}05$

$$\begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 6{,}10 \\ 3 & 1 & 2 & 5{,}60 \\ 3 & 3 & 1 & 7{,}05 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 6{,}10 \\ 0 & -3 & 3 & -1{,}50 \\ 0 & 3 & 0 & 2{,}85 \end{array}\right)$$

(III) $\Rightarrow x_2=0{,}95 \quad$ (II) $\Rightarrow x_3=0{,}45 \quad$ (I) $\Rightarrow x_1=1{,}25$

Enya: $3\cdot 1{,}25=3{,}75$

Enya hat aber 6,55 € bezahlt, also können nicht alle Filzplatten und Perlen ihrer Schwester Jaqueline gehören.

14

x_1: Preis Packung Nudeln x_2: Preis Kiste Limonade x_3: Preis ein Liter Milch

(I) $4x_1 + x_2 + 2x_3 = 18{,}30$

(II) $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 32{,}65$

(III) $7x_1 + 0{,}5x_2 + 3x_3 = 14{,}90$

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 18{,}30 \\ 3 & 2 & 4 & 32{,}65 \\ 7 & 0{,}5 & 3 & 14{,}90 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 18{,}30 \\ 0 & 5 & 10 & 75{,}7 \\ 0 & -5 & -2 & -68{,}5 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 18{,}30 \\ 0 & 5 & 10 & 75{,}7 \\ 0 & 0 & 40 & 36 \end{array} \right)$$

$(III) \Rightarrow x_3 = 0{,}90 \quad x_2 = 13{,}34 \quad x_1 = 0{,}79$

Eine Packung Nudeln kostet 0,79 €, eine Kiste Limonade 13,34 € und ein Liter Milch 0,90 €.

15

(I) $x_1 = 3x_3$

(II) $3x_2 = 2x_4$

(III) $x_2 = 2x_3$

(IV) $4x_2 = 8x_3$

$(II) \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3}x_4$

$(III) \Rightarrow x_3 = \frac{1}{3}x_4$

$(I) \Rightarrow x_1 = x_4$

$\Rightarrow x_1 = 3; x_2 = 2; x_3 = 1; x_4 = 3;$

16.1

(I) $I_3 = I_1 + I_2$

(II) $8 \cdot I_1 + 2 \cdot I_3 = 16$

(III) $8 \cdot I_2 + 2 \cdot I_3 = 32$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -10 & -16 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -10 & -16 \\ 0 & 0 & 96 & 384 \end{array} \right)$$

$(III) \Rightarrow I_3 = 4 \quad (II) \Rightarrow I_2 = 3 \quad (I) \Rightarrow I_1 = 1$

16.2

(I) $I_1 = I_3 + I_4$ (II) $I_1 = I_2 + I_3$ (III) $I_6 = I_4 + I_5$ (IV) $I_6 = I_2 + I_5$

(V) $2 \cdot I_1 + 4 \cdot I_3 = 80$ (VI) $2 \cdot I_4 - 4 \cdot I_3 + 2 \cdot I_2 - 4 \cdot I_3 = 0$

(VII) $2 \cdot I_6 + 4 \cdot I_5 = 80$

(II) − (I) $\Rightarrow I_2 = I_4$ (IV) − (III) $\Rightarrow I_2 = I_4$

(VI) $\Rightarrow 4 \cdot I_4 = 8 \cdot I_3 \quad \Rightarrow I_3 = \frac{1}{2} \cdot I_4$

(I) in (V) $\Rightarrow 2 \cdot I_3 + 2 \cdot I_4 + 4 \cdot I_3 = 80 \quad \Rightarrow I_4 + 2 \cdot I_4 + 2 \cdot I_4 = 80 \quad \Rightarrow I_4 = 16$

$\Rightarrow I_2 = 16 \quad \Rightarrow I_3 = 8$

$\Rightarrow I_1 = 24$

(IV) in (VII) $\Rightarrow 2 \cdot I_2 + 2 \cdot I_5 + 4 \cdot I_5 = 80 \quad \Rightarrow 6 \cdot I_5 = 48 \Rightarrow I_5 = 8$

$\Rightarrow I_6 = 24$

17

x_1: Anzahl Paket 1 x_2: Anzahl Paket 2 x_3: Anzahl Paket 3

(I) $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 20$

(II) $2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 23$

(III) $5x_2 + 3x_3 = 11$

$$\begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 20 \\ 2 & 5 & 7 & 23 \\ 0 & 5 & 3 & 11 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 20 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & 3 & 11 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 20 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{array} \right)$$

(III) $\Rightarrow x_3 = 2$ (II) $\Rightarrow x_2 = 1$ (I) $\Rightarrow x_1 = 2$

Die Studentin sollte zweimal Paket 1, einmal Paket 2 und zweimal Paket 3 kaufen.

18

$$\begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & -3 & -20 \\ -1 & 6 & -1 & 10 \\ 0 & -2 & 3 & 80 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & -3 & -20 \\ 0 & 34 & -9 & 40 \\ 0 & -2 & 3 & 80 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & -3 & -20 \\ 0 & 34 & -9 & 40 \\ 0 & 0 & 84 & 2800 \end{array}\right)$$

$$(III) \Rightarrow 84c = 2800 \quad \Rightarrow c = \frac{100}{3}$$

$$(II) \Rightarrow 34b - 9 \cdot \frac{100}{3} = 40 \quad \Rightarrow 34b = 340 \quad \Rightarrow b = 10$$

$$(I) \Rightarrow 6a - 2 \cdot 10 - 3 \cdot \frac{100}{3} = -20 \quad \Rightarrow 6a = 100 \quad \Rightarrow a = \frac{50}{3}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{50}{3}; 10; \frac{100}{3} \right) \right\}$$